

فرمول عمومی برای محاسبه سری ها در دنباله های حسابی بر اساس " جدول اعداد استر لینگ نوع اول" (Nth difference sequences)

محمد رضا سراجیان اصل :

چکیده مقاله:

در این مقاله فرمول کلی برای محاسبه حاصل جمع " t " جمله ، از دنباله هایی با ویژگی تفاضل گیری های چند مرتبه ای برای بدست آمدن مقدار تفاضل مشترک، بر پایه " اعداد استرلینگ نوع اول " معرفی می گردد. پیشتر، این گونه از محاسبات برای دنباله هایی با مرتبه بالا از (f)، با زمانبری و پیچیدگی حل دستگاه معادلات (f) معادله و (f) مجهول، و نیز محاسبات ماتریسی متعدد انجام می گردید.

جدولی از دنباله های با ویژگی " تفاضل گیری های چند مرتبه ای برای بدست آمدن مقدار تفاضل مشترک " بشرح زیر می باشد

Floor No.f f = ?	$(a_f)_1$	$(a_f)_2$	$(a_f)_3$	$(a_f)_4$	$(a_f)_5$	$(a_f)_6$	$(a_f)_7$	$(a_f)_8$	$(a_f)_9$	$(a_f)_{10}$...	$(a_f)_t$
...												
Floor No.8 f = 8	$(a_8)_1$	$(a_8)_2$	$(a_8)_3$	$(a_8)_4$	$(a_8)_5$	$(a_8)_6$	$(a_8)_7$	$(a_8)_8$	$(a_8)_9$	$(a_8)_{10}$		
Floor No.7 f = 7	$(a_7)_1$	$(a_7)_2$	$(a_7)_3$	$(a_7)_4$	$(a_7)_5$	$(a_7)_6$	$(a_7)_7$	$(a_7)_8$	$(a_7)_9$			
Floor No.6 f = 6	$(a_6)_1$	$(a_6)_2$	$(a_6)_3$	$(a_6)_4$	$(a_6)_5$	$(a_6)_6$	$(a_6)_7$	$(a_6)_8$				
Floor No.5 f = 5	$(a_5)_1$	$(a_5)_2$	$(a_5)_3$	$(a_5)_4$	$(a_5)_5$	$(a_5)_6$	$(a_5)_7$					
Floor No.4 f = 4	$(a_4)_1$	$(a_4)_2$	$(a_4)_3$	$(a_4)_4$	$(a_4)_5$	$(a_4)_6$						
Floor No.3 f = 3	$(a_3)_1$	$(a_3)_2$	$(a_3)_3$	$(a_3)_4$	$(a_3)_5$							
Floor No.2 f = 2	$(a_2)_1$	$(a_2)_2$	$(a_2)_3$	$(a_2)_4$								
Floor No.1 f = 1	Common difference floor				$(a_1)_1$	$(a_1)_2$	$(a_1)_3$					
					0	0						

نمونه ای عددی از دنباله های بالا بشکل زیر است.

Floor No.f f = ?	$(a_f)_1$	$(a_f)_2$	$(a_f)_3$	$(a_f)_4$	$(a_f)_5$	$(a_f)_6$	$(a_f)_7$	$(a_f)_8$	$(a_f)_9$	$(a_f)_{10}$...	$(a_f)_t$
...												
Floor No.8 f = 8	-45	-46	-70	-108	-61	455	2484	8345	22547	53064		
Floor No.7 f = 7	-1	-24	-38	47	516	2029	5861	14202	30517			
Floor No.6 f = 6	-23	-14	85	469	1513	3832	8341	16315				
Floor No.5 f = 5	9	99	384	1044	2319	4509	7974					
Floor No.4 f = 4	90	285	660	1275	2190	3465						
Floor No.3 f = 3	195	375	615	915	1275							
Floor No.2 f = 2	180	240	300	360								
Floor No.1 f = 1	Common difference floor				60	60	60					
					0	0						

در شکل بالا هر یک از دنباله ها حاصل تفاضل گیری دنباله بالاتر بوده و طبقه و مرتبه ای در آپارتمان دنباله ها را بخود اختصاص می دهد.

در این مقاله فرمول کلی برای محاسبه حاصل جمع " t " جمله، از اول دنباله حسابی " سری " بر اساس مجموعه ضرائبی از اعداد استرلینگ نوع اول ارائه می شود.

در فرمول ذکر شده، در نماد $(a_f)_t$ نماد " a " بمفهوم دنباله می باشد. و نماد " f " نشانگر طبقه و مرتبه دنباله در آپارتمان دنباله ها بوده و نماد " t " نشانگر مرتبه جمله " t / امین " در دنباله مفروض می باشد.

توجه: تغییر علامت یا نمادهای موضوع دنباله یا تصاعد بعلت وجود مشابهت در نمادهای دنباله با نمادهای مجموعه استرلینگ می باشد.

بطور مثال: نماد $(a_5)_7$ نشانگر هفتمین " t = 7 " جمله از دنباله مرتبه پنج " f = 5 " و نماد $(a_5)_7$ نمایشگر حاصل جمع هفت " t = 7 " عدد از ابتدای دنباله مرتبه پنج " f = 5 "

$$\sum_{t=1}^7 (a_5)_7 = 9 + 99 + 384 + 1044 + 2319 + 4509 + 7974 = 1633$$

فرمول کلی برای محاسبه حاصل جمع " t " جمله، از اول دنباله حسابی " سری " بر اساس مجموعه ضرائبی از اعداد استرلینگ نوع اول ارائه می شود.

$$\sum_{t=1}^t (a_f)_t = \left[(a_1)_1 \cdot \frac{\sum_{k=1, f=1}^{n, k=(f-0)} [s(n, k) \cdot t^{(f-0)}]}{(f-0)!} \right] + \left[(a_2)_1 \cdot \frac{\sum_{k=1, f=2}^{n, k=(f-1)} [s(n, k) \cdot t^{(f-1)}]}{(f-1)!} \right] + \left[(a_3)_1 \cdot \frac{\sum_{k=1, f=3}^{n, k=(f-2)} [s(n, k) \cdot t^{(f-2)}]}{(f-2)!} \right] + \dots + \left[(a_f)_1 \cdot \frac{\sum_{k=1, f=f}^{n, k=[f-(f-1)]} [s(n, k) \cdot t^{[f-(f-1)]}]}{[f-(f-1)]!} \right]$$

فرم اصلاح شده فرمول بالا با استفاده از نماد سیگمای تو در تو، "سیگمای دوپل" بصورت زیر می باشد.

$$\sum_{t=1}^t (a_f)_t = \left[(a_1)_1 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n, k=(f-0)} \sum_{f=1}^{(f-0)} [s(n, k) \cdot t^{(f-0)}]}{(f-0)!} \right] + \left[(a_2)_1 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n, k=(f-1)} \sum_{f=2}^{(f-1)} [s(n, k) \cdot t^{(f-1)}]}{(f-1)!} \right] + \left[(a_3)_1 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n, k=(f-2)} \sum_{f=3}^{(f-2)} [s(n, k) \cdot t^{(f-2)}]}{(f-2)!} \right] + \dots + \left[(a_f)_1 \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n, k=[f-(f-1)]} \sum_{f=f}^{[f-(f-1)]} [s(n, k) \cdot t^{[f-(f-1)]}]}{[f-(f-1)]!} \right]$$

آنچه که در فرمول کلی بالا، پارامترها و اطلاعات سیگما، بیان می کنند.

فرمول مزبور از چندین عبارت کسری تشکیل یافته است. در اولین عبارت کسری در صورت کسر، معادله ای از درجه " (f-0) " و بر حسب " t " و پارامترهای آن ضرائبی از مجموعه اعداد استرلینگ نوع اول واقع در ردیف افقی شماره همسان با " (f-0) " و مخرج کسر، مقدار " (f-0) ! " بوده، و ضریب کلی برای عبارت کسری، جمله اول از دنباله مرتبه اول $(a_1)_1$ می باشد.

برای نمونه اولین عبارت کسری از فرمول کلی برای دنباله $(a_7)_t$ بصورت زیر می باشد.

$$\sum_{t=1}^t (a_f)_t = \left[(a_1)_1 \cdot \frac{\sum_{k=1, f=1}^{n, k=(f-0)} [s(n, k) \cdot t^{(f-0)}]}{(f-0)!} \right] + \blacksquare \quad \rightarrow$$

$$\sum_{t=1}^t (a_7)_t = \left[(a_1)_1 \cdot \frac{\sum_{k=1, f=1}^{n, k=(7-0)} [s(7, k_1, \dots, 7) \cdot t^{(7-0)}]}{(7-0)!} \right] + \blacksquare$$

ارایه مثلثی اعداد استرلینگ نوع اول:

n	k	k ₁	k ₂	k ₃	k ₄	k ₅	k ₆	k ₇	k ₈	k ₉
n ₁		1								
n ₂		-1	1							
n ₃		2	-3	1						
n ₄		-6	11	-6	1					
n ₅		24	-50	35	-10	1				
n ₆		-120	274	-225	85	-15	1			
n ₇		720	-1764	1624	-735	175	-21	1		
n ₈		-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	
n ₉		40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1

اولین عبارت کسری از فرمول کلی، برای دنباله $(a_7)_t$ بعد از بسط بر اساس اطلاعات نماد سیگما، بشکل زیر می باشد.

$$\sum_{t=1}^t (a_f)_t = (a_1)_1 \cdot \left[\frac{s(n_7, k_1) \cdot t^{(f_1-0)} + s(n_7, k_2) \cdot t^{(f_2-0)} + s(n_7, k_3) \cdot t^{(f_3-0)} + s(n_7, k_4) \cdot t^{(f_4-0)} + s(n_7, k_5) \cdot t^{(f_5-0)} + s(n_7, k_6) \cdot t^{(f_6-0)} + s(n_7, k_7) \cdot t^{(f_7-0)}}{(f-0)!} \right] + \blacksquare$$

پس از جایگذاری مجموعه اعداد استرلینگ نوع اول مربوطه، بمنزله ضرائب هر یک از جمله های عبارت، اولین

عبارت کسری از فرمول کلی برای دنباله $(a_7)_t$ بشکل زیر ایجاد می گردد.

$$\sum_{t=1}^t (a_7)_t = (a_1)_1 \cdot \left(\frac{720t^1 - 1764t^2 + 1624t^3 - 735t^4 + 175t^5 - 21t^6 + 1 \cdot t^7}{7!} \right) + \blacksquare$$

دومین عبارت کسری از فرمول کلی، برای دنباله $(a_7)_t$ بعد از بسط بر اساس اطلاعات نماد سیگما، بشکل زیر می باشد.

$$\sum_{t=1}^t (a_7)_t = (a_1)_1 \cdot (\text{First fraction}) + (a_2)_1 \cdot \left[\frac{s(n_6, k_1) t^{(f_1-1)} + s(n_6, k_2) t^{(f_2-1)} + s(n_6, k_3) t^{(f_3-1)} + s(n_6, k_4) t^{(f_4-1)} + s(n_6, k_5) t^{(f_5-1)} + s(n_6, k_6) t^{(f_6-1)}}{(f-1)!} \right]$$

پس از جایگذاری مجموعه اعداد استرلینگ نوع اول مربوطه، بمنزله ضرائب هر یک از جمله های عبارت، دومین

عبارت کسری از فرمول کلی برای دنباله $(a_7)_t$ بشکل زیر ایجاد می گردد.

$$\sum_{t=1}^t (a_7)_t = (a_1)_1 \cdot (\text{First fraction}) + (a_2)_1 \cdot \left[\frac{-120t^{(2-1)} + 274t^{(3-1)} - 225t^{(4-1)} + 85t^{(5-1)} - 15t^{(6-1)} + 1 \cdot t^{(7-1)}}{(7-1)!} \right]$$

$$\left[\sum_{t=1}^t (a_7)_t = (a_1)_1 \cdot (\text{First fraction}) + (a_2)_1 \cdot \left(\frac{-120t + 274t^2 - 225t^3 + 85t^4 - 15t^5 + 1 \cdot t^6}{6!} \right) \right] + \dots$$

سومین عبارت کسری از فرمول کلی، برای دنباله $(a_7)_t$ بعد از بسط بر اساس اطلاعات نماد سیگما، بشکل زیر می باشد.

$$\sum_{t=1}^t (a_7)_t = (a_1)_1 \cdot (\text{First fraction}) + (a_2)_1 \cdot (\text{Second fraction}) + (a_3)_1 \cdot \left[\frac{s(n_5, k_1) t^{(f_1-2)} + s(n_5, k_2) t^{(f_2-2)} + s(n_5, k_3) t^{(f_3-2)} + s(n_5, k_4) t^{(f_4-2)} + s(n_5, k_5) t^{(f_5-2)}}{(f-2)!} \right] + \dots$$

پس از جایگذاری مجموعه اعداد استرلینگ نوع اول مربوطه، بمنزله ضرائب هر یک از جمله های عبارت، سومین

عبارت کسری از فرمول کلی برای دنباله $(a_7)_t$ بشکل زیر ایجاد می گردد.

$$\sum_{t=1}^t (a_7)_t = (a_1)_1 \cdot (\text{First fraction}) + (a_2)_1 \cdot (\text{Second fraction}) + (a_3)_1 \cdot \left[\frac{24t^{(f_1-2)} - 50t^{(f_2-2)} + 35t^{(f_3-2)} - 10t^{(f_4-2)} + 1 \cdot t^{(f_5-2)}}{(f-2)!} \right] + \dots + \dots$$

$$\sum_{t=1}^t (a_7)_t = (a_1)_1 \cdot (\text{First fraction}) + (a_2)_1 \cdot (\text{Second fraction}) + (a_3)_1 \cdot \left(\frac{24t - 50t^2 + 35t^3 - 10t^4 + t^5}{5!} \right) + \dots + \dots$$

بدین صورت سومین عبارت کسری از فرمول کلی برای دنباله $(a_7)_t$ ایجاد می شود، سپس با ادامه این روش و با تغییرات متوالی در پارامتر های سیگما "f, n, k" و جمله های عبارات کسری و ضرایب مربوطه سایر عبارات های کسری فرمول کلی را تا به آخرین عبارت کسری ایجاد می نمایم .

آخرین عبارت کسری از فرمول کلی برای دنباله $(a_7)_t$ بر اساس اطلاعات سیگما.

$$\sum_{t=1}^t (a_7)_t = (a_1)_1 \cdot (\text{First fraction}) + (a_2)_1 \cdot (\text{Second fraction}) + (a_3)_1 \cdot (\text{Third fraction}) + \dots + (a_f)_1 \cdot \frac{\sum_{n,k=[f-(f-1)]}^{n,k=[f-(f-1)]} [s(n,k) \cdot t^{[f-(f-1)]}]}{[f - (f - 1)]!}$$

با جایگذاری عدد استرلینگ نوع اول مربوطه، بمنزله ضریب تنها جمله عبارت، آخرین " در این دنباله، هفتمین 7^{th} " عبارت کسری از فرمول کلی برای دنباله $(a_7)_t$ بشکل زیر ایجاد می گردد.

$$\sum_{t=1}^t (a_7)_t = (a_1)_1 \cdot (\text{First fraction}) + (a_2)_1 \cdot (\text{Second fraction}) + (a_3)_1 \cdot (\text{Third fraction}) + \dots + (a_7)_1 \cdot \frac{\sum_{n,k=[7-(7-1)]}^{n,k=[7-(7-1)]} [s(1,1) \cdot t^{[7-(7-1)]}]}{[7 - (7 - 1)]!}$$

$$\sum_{t=1}^t (a_7)_t = (a_1)_1 \cdot (\text{1th fraction}) + (a_2)_1 \cdot (\text{2th fraction}) + (a_3)_1 \cdot (\text{3th fraction}) + (a_4)_1 \cdot (\text{4th fraction}) + (a_5)_1 \cdot (\text{5th fraction}) + (a_6)_1 \cdot (\text{6th fraction}) + (a_7)_1 \cdot \frac{1 \cdot t}{1!}$$

فرمول عمومی برای محاسبه حاصل جمع " t " جمله ی اول از دنباله $(a_7)_t$ و مثالی برای آن از دنباله $(a_7)_8$ ، بشرح زیر می باشد.

$$\sum_{t=1}^8 (a_7)_t = (a_1)_1 \left(\frac{720t - 1764t^2 + 1624t^3 - 735t^4 + 175t^5 - 21t^6 + t^7}{7!} \right) + (a_2)_1 \left(\frac{-120t + 274t^2 - 225t^3 + 85t^4 - 15t^5 + t^6}{6!} \right) + (a_3)_1 \left(\frac{24t - 50t^2 + 35t^3 - 10t^4 + t^5}{5!} \right) + (a_4)_1 \left(\frac{-6t + 11t^2 - 6t^3 + t^4}{4!} \right) + (a_5)_1 \left(\frac{2t - 3t^2 + t^3}{3!} \right) + (a_6)_1 \left(\frac{-t + t^2}{2!} \right) + (a_7)_1 \left(\frac{t}{1!} \right) =$$

$$-1 + -24 + -38 + 47 + 516 + 2029 + 5861 + 14202 = 22592$$

$$60 \left(\frac{7208 - 17648t^2 + 16248t^3 - 7358t^4 + 1758t^5 - 218t^6 + 8t^7}{7!} \right) + 180 \left(\frac{-1208 + 2748t^2 - 2258t^3 + 858t^4 - 158t^5 + 8t^6}{6!} \right) + 195 \left(\frac{248 - 508t^2 + 358t^3 - 108t^4 + 8t^5}{5!} \right) + 90 \left(\frac{-68 + 118t^2 - 68t^3 + 8t^4}{4!} \right) + 9 \left(\frac{28 - 38t^2 + 8t^3}{3!} \right) + (-23) \left(\frac{-8 + 8t^2}{2!} \right) + (-1) \left(\frac{8}{1!} \right) = 22592$$

با استفاده از فرمول کلی بآسانی می توان فرمول محاسبه حاصل جمع " t " جمله ی اول برای سایر دنباله های حسابی از انواع (اعشاری و صحیح و جبری و ...) واقع در آپارتمان دنباله ها را ایجاد نمود.

بطور مثال: فرمول عمومی برای محاسبه حاصل جمع " t " جمله ی اول از دنباله $(a_8)_t$ و ارائه مثالی عددی برای آن " محاسبه حاصل جمع ده، " $t = 10$ " جمله ی اول از دنباله $(a_8)_{10}$ ، بشرح زیر می باشد.

$$\sum_{t=1}^{10} (a_8)_t = (a_1)_1 \left(\frac{-5040t + 13068t^2 - 13132t^3 + 6769t^4 - 1960t^5 + 322t^6 - 28t^7 + t^8}{8!} \right) + (a_2)_1 \left(\frac{720t - 1764t^2 + 1624t^3 - 735t^4 + 175t^5 - 21t^6 + t^7}{7!} \right) + (a_3)_1 \left(\frac{-120t + 274t^2 - 225t^3 + 85t^4 - 15t^5 + t^6}{6!} \right) + (a_4)_1 \left(\frac{24t - 50t^2 + 35t^3 - 10t^4 + t^5}{5!} \right) + (a_5)_1 \left(\frac{-6t + 11t^2 - 6t^3 + t^4}{4!} \right) + (a_6)_1 \left(\frac{2t - 3t^2 + t^3}{3!} \right) + (a_7)_1 \left(\frac{-t + t^2}{2!} \right) + (a_8)_1 \left(\frac{t}{1!} \right) =$$

$$(-45) + (-46) + (-47) + (-48) + (-49) + (-50) + (-51) + (-52) + (-53) + (-54) + (-55) + (-56) + (-57) + (-58) + (-59) + (-60) + (-61) + (-62) + (-63) + (-64) + (-65) + (-66) + (-67) + (-68) + (-69) + (-70) + (-71) + (-72) + (-73) + (-74) + (-75) + (-76) + (-77) + (-78) + (-79) + (-80) + (-81) + (-82) + (-83) + (-84) + (-85) + (-86) + (-87) + (-88) + (-89) + (-90) + (-91) + (-92) + (-93) + (-94) + (-95) + (-96) + (-97) + (-98) + (-99) + (-100)$$

$$90 \left(\frac{10^9 - 28 \times 10^7 + 322 \times 10^5 - 1960 \times 10^3 + 6760 \times 10 - 13125 \times 10^2 + 13068 \times 10^2 - 5040 \times 10}{8} \right) + 180 \left(\frac{10^7 - 21 \times 10^6 + 175 \times 10^5 - 735 \times 10^4 + 1624 \times 10^3 - 1764 \times 10^2 + 720 \times 10}{7} \right) + 195 \left(\frac{10^6 - 15 \times 10^5 + 85 \times 10^4 - 225 \times 10^3 + 274 \times 10^2 - 120 \times 10}{6} \right) + 90 \left(\frac{10^5 - 10 \times 10^4 + 35 \times 10^3 - 50 \times 10^2 + 24 \times 10}{5} \right) + 9 \left(\frac{10^4 - 6 \times 10^3 + 11 \times 10^2 - 6 \times 10}{4} \right) + (-25) \left(\frac{10^3 - 3 \times 10^2 + 2 \times 10}{3} \right) + (-1) \left(\frac{10^2 - 10}{2} \right) + (-45) \left(\frac{10}{1} \right) - 86565$$

بطور مثال: فرمول عمومی برای محاسبه حاصل جمع "t" جمله ی اول از دنباله $(a_n)_t$ و ارائه مثالی عددی برای آن "محاسبه حاصل جمع هشت، "t = 8" جمله ی اول از دنباله $(a_n)_8$ ، بشرح زیر می باشد. لازم بذکر اینکه مقدار اولین جمله $(a_n)_1$ برابر با، " -0.2 " می باشد

$$\sum_{k=1}^n (a_k)_n = \left[\frac{[n, k, (-1)^{k-1} \sum_{l=1}^{n-k} [n, l, k] l^{n-k-1}]}{(n-k)!} \right] + \left[\frac{[n, k, (-1)^{k-1} \sum_{l=1}^{n-k-1} [n, l, k] l^{n-k-1}]}{(n-k-1)!} \right] + \left[\frac{[n, k, (-1)^{k-1} \sum_{l=1}^{n-k-2} [n, l, k] l^{n-k-1}]}{(n-k-2)!} \right] + \dots + \left[\frac{[n, k, (-1)^{k-1} \sum_{l=1}^{n-k} [n, l, k] l^{n-k-1}]}{(n-k)!} \right]$$

$$60 \left(\frac{403200 - 109584 \times 10 + 118128 \times 10^2 - 67284 \times 10^3 + 22496 \times 10^4 - 4536 \times 10^5 + 546 \times 10^6 - 36 \times 10^7 + 9^9}{8!} \right) + 180 \left(\frac{-50400 + 13068 \times 10 - 13125 \times 10^2 + 6760 \times 10^3 - 1960 \times 10^4 + 322 \times 10^5 - 28 \times 10^6 + 8^8}{7!} \right) + 195 \left(\frac{7200 - 17640 \times 10 + 1624 \times 10^2 - 735 \times 10^3 + 175 \times 10^4 - 21 \times 10^5 + 8^7}{6!} \right) + 90 \left(\frac{-1200 + 2740 \times 10 - 225 \times 10^2 + 85 \times 10^3 - 15 \times 10^4 + 8^6}{5!} \right) + 9 \left(\frac{248 - 50 \times 10 + 35 \times 10^2 - 10 \times 10^3 + 8^5}{4!} \right) + (-25) \left(\frac{-68 + 11 \times 10 - 6 \times 10^2 + 8^4}{3!} \right) + (-1) \left(\frac{28 - 3 \times 10 + 8^3}{2!} \right) + (-45) \left(\frac{-8 + 10}{1!} \right) + (-0.2) \left(\frac{8}{1} \right) - 1836.4$$

نکته مهم: با علاوه (اضافه) نمودن مقدار اولین جمله از دنباله مرتبه بالاتر، به فرمول عمومی دنباله حسابی مرتبه پائینتر، می توان مقدار هر یک از جمله های دنباله حسابی مرتبه بالاتر را تعیین نمود.

کلمات کلیدی: دنباله حسابی، اعداد استرلینگ، سری حسابی، دنباله حسابی با ویژگی تفاضل گیری متوالی برای قدر نسبت، Nth difference sequences

Mohammad Reza Serajian Asl

- 1- Wikipedia "Stirling numbers of the first kind"
- 2- OEIS