

## روابط بازگشتی، برای تعیین کلیه انواع اعداد Stirling و r-Stirling مربوط به آن، بر اساس آرایه های منشور عددی

آرایه منشور عددی چیست:

مجموعه ای از آرایه های مربعی با چینش متوالی بشرح زیر می باشد.

اولین مربع، آرایه عددی با عنوان  $k = 1$  و اولین ردیف افقی  $n = 1$  و اولین ستون عمودی  $r = 1$  که مقدار عددی همه سلول های آن 1 است.

دومین مربع، آرایه عددی با عنوان  $k = 2$  و اولین ردیف افقی  $n = 2$  و اولین ستون عمودی  $r = 1$  و سلول هائی با مقادیر حاصل از رابطه های بازگشتی زیر. برای اعداد استرلینگ نوع اول و دوم با مقدار های  $x = 1$  و  $x = 2$  بترتیب.

$$\text{1st kind: } Stx(n+1, k, r) = Stx(n, k, r) + Stx(n, k-1, r) * [(n+r-1)].$$

$$\text{2nd kind: } Stx(n+1, k, r) = Stx(n, k, r) + Stx(n, k-1, r) * [(-k) + (n+r+1)].$$

و برای اعداد استرلینگ نوع های بزرگتر از نوع دوم،  $x > 2$  از فرمول زیر.

$$\text{x-th kind: } Stx(n+1, k, r) = Stx(n, k, r) + [Stx(n, k-1, r)] * \{[-2^{(x-3)}] * k + [2^{(x-2)}] * (n+r)\}$$

سومین مربع، آرایه عددی با عنوان  $k = 3$  و اولین ردیف افقی  $n = 3$  و اولین ستون عمودی  $r = 1$  و سلول هائی با مقادیر حاصل از رابطه های بازگشتی بالا.

چهارمین مربع، آرایه عددی با عنوان  $k = 4$  و اولین ردیف افقی  $n = 4$  و اولین ستون عمودی  $r = 1$  و سلول هائی با مقادیر حاصل از رابطه های بازگشتی بالا.

$k$ امین مربع، آرایه عددی با عنوان  $k = k$  و اولین ردیف افقی  $n = n$  و اولین ستون عمودی  $r = 1$  و سلول هائی با مقادیر حاصل از رابطه های بازگشتی بالا.

با پشت سر هم قرار دادن آرایه های مربعی ذکر شده در بالا بصورتی که کلیه ردیف های افقی  $n$  و نیز ستون های عمودی  $r$  با شماره های یکسان در ردیف های عمقی (بعدی) همسان قرار گیرند. آرایه منشوری با شکل مثالی زیر حاصل می شود.

آرایه مثالی زیر اعداد استرلینگ نوع چهارم به همراه آر-استرلینگ های مربوطه

( Stirling and related r-Stirling numbers of the fourth kind )

می باشد در ستون اول عمودی از آرایه های مربعی یعنی  $r = 1$  همواره اعداد استرلینگ نوع  $x$  قرار دارند و در سایر ستون های عمودی از آرایه های منشوری در حالت های  $r > 1$ ، (r-Stirlin) های مربوط به آن قرار می گیرند.

بطور مثال:

قسمتی از آرایه منشوری مربوط به اعداد استرلینگ نوع چهارم و آر-استرلینگ های مربوط به آن.

					<b>n \ r</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	
					<b>k = 1</b>	1	1	1	1	
					<b>1</b>					1
					<b>k = 2</b>					1
					<b>2</b>	4	8	12	16	1
					<b>k = 3</b>					1
					<b>3</b>	24	80	168	288	60
					<b>k = 4</b>					1
					<b>4</b>	192	960	2688	5760	1080
					<b>k = 5</b>					1
					<b>5</b>	1920	13440	48384	126720	31680
					<b>k = 6</b>					1
					<b>6</b>	23040	215040	967680	3041280	950400
					<b>7</b>	St4(1)	St4(2)	St4(3)	St4(4)	St4(4)
					<b>8</b>	St4(1)	St4(2)	St4(3)	St4(4)	St4(4)
					<b>9</b>	St4(1)	St4(2)	St4(3)	St4(4)	St4(4)
					<b>10</b>	St4(1)	St4(2)	St4(3)	St4(4)	St4(4)
					<b>11</b>	St4(1)	St4(2)	St4(3)	St4(4)	St4(4)
					<b>12</b>	St4(1)	St4(2)	St4(3)	St4(4)	St4(4)
					<b>13</b>	St4(1)	St4(2)	St4(3)	St4(4)	St4(4)
					<b>14</b>	St4(1)	St4(2)	St4(3)	St4(4)	St4(4)
					<b>15</b>	St4(1)	St4(2)	St4(3)	St4(4)	St4(4)

بطور مثال در آرایه منشوری بالا.

$$St_4(1) = ( 23040, 28800, 9600, 1200, 60, 1 )$$

$$St_4(2) = ( 215040, 134400, 26880, 2240, 80, 1 )$$

$$St_4(3) = ( 48384, 16128, 1728, 72, 1 )$$

$$St_4(4) = ( 3041280, 950400, 105600, 5280, 120, 1 )$$

در زیر مجموعه ای از دنباله های آر-استرلینگ نوع چهارم در حالت  $r = 2$ ،

The r-Stirling numbers of the fourth kind in the case,  $r = 2$ .

1, 8, 1, 80, 20, 1, 960, 360, 36, 1, 13440, 6720, 1008, 56, 1, 215040, 134400, 26880, 2240, 80, 1, 3870720, 2903040, 725760, 80640, 4320, 108, 1, 77414400, 67737600, 20321280, 2822400, 201600, 7560, 140, 1, 1703116800, 1703116800, 596090880, 99348480, 8870400, 443520, 12320, 176, 1, 40874803200, 45984153600, 18393661440, 3576545280, 383201280, 23950080, 887040, 19008, 216, 1

در زیر فرمولهای روابط بازگشتی برای اعداد استرلینگ و آر-استرلینگ نوع اول الی نوع هفتم ارائه گردیده است.

$$\begin{aligned}
 \text{1st kind: } St_1(n+1, k, r) &= St_1(n, k, r) + St_1(n, k-1, r) * [(n+r-1)]; \\
 \text{2nd kind: } St_2(n+1, k, r) &= St_2(n, k, r) + St_2(n, k-1, r) * [(-k) + (n+r+1)]; \\
 \text{3rd kind: } St_3(n+1, k, r) &= St_3(n, k, r) + St_3(n, k-1, r) * [(-k) + 2*(n+r)]; \\
 \text{4th kind: } St_4(n+1, k, r) &= St_4(n, k, r) + St_4(n, k-1, r) * [(-2*k) + 4*(n+r)]; \\
 \text{5th kind: } St_5(n+1, k, r) &= St_5(n, k, r) + St_5(n, k-1, r) * [(-4*k) + 8*(n+r)]; \\
 \text{6th kind: } St_6(n+1, k, r) &= St_6(n, k, r) + St_6(n, k-1, r) * [(-8*k) + 16*(n+r)]; \\
 \text{7th kind: } St_7(n+1, k, r) &= St_7(n, k, r) + St_7(n, k-1, r) * [(-16*k) + 32*(n+r)];
 \end{aligned}$$

با نگاه اجمالی می توان مشاهده نمود که تنها اختلاف در روابط بازگشتی بالا، ضرائب  $St_x(n, k-1, r)$  می باشند که حاصل جمع ضرائب در نوع های پیشین است. بدینصورت که حاصل جمع دو ضریب متوالی از روابط بازگشتی استرلینگ نوع اول و دوم می شود روابط بازگشتی استرلینگ نوع سوم ( **Lah numbers** ) و قس لهذا الی ضریب  $St_x$

$$[(n+r-1)] + [(-k) + (n+r+1)] = [(-k) + 2*(n+r)]$$

$$[(n+r-1)] + [(-k) + (n+r+1)] + [(-k) + 2*(n+r)] = [(-2*k) + 4*(n+r)]$$

$$[(n+r-1)] + [(-k) + (n+r+1)] + [(-k) + 2*(n+r)] + [(-2*k) + 4*(n+r)] = [(-4*k) + 8*(n+r)]$$

که در حلت کلی بصورت زیر می باشد.

$$(\text{coeff. of 1st kind}) + (\text{coeff. of 2nd kind}) + (\text{coeff. of 3rd kind}) + (\text{coeff. of 4th kind}) + \dots + (\text{coeff. of } (x-1)\text{-th kind}) \implies (\text{coeff. of } x\text{-th kind})$$

و محصول آن رابطه بازگشتی برای همه انواع اعداد استرلینگ بزرگتر از نوع دوم می گردد.

$$x\text{-th kind: } St_x(n+1, k, r) = St_x(n, k, r) + [St_x(n, k-1, r)] * \{[-2^{(x-3)}] * k + [2^{(x-2)}] * (n+r)\}$$

بطور مثال: مجموعه ای از اعداد استرلینگ واقع در ردیف افقی  $n = 5$  و ستون عمودی  $r = 2$  و آرایه ها یا صفحات مربعی  $k = 1, 2, 3, \dots, 5$  از آرایه منشور عددی حاصل از استرلینگ نوع چهارم در حالت (  $r$ -Stirling numbers ) بصورت،  $St_4(2) = (1, 56, 1008, 6720, 13440)$  می باشد؛ که در آرایه منشوری زیر بوسیله اعداد رنگی مشخص گردیده است.

```

*****
n\r|.....1.....2.....3.....4
===== k = 1
1..|.....1.....1.....1.....1
2..|.....1.....1.....1.....1
3..|.....1.....1.....1.....1
4..|.....1.....1.....1.....1
5..|.....1.....1.....1.....1
6..|.....1.....1.....1.....1
*****
n\r|.....1.....2.....3.....4
===== k = 2
2..|.....4.....8.....12.....16
3..|.....12.....20.....28.....36
4..|.....24.....36.....48.....60
5..|.....40.....56.....72.....88
6..|.....60.....80.....100.....120
*****
n\r|.....1.....2.....3.....4
===== k = 3
3..|.....24.....80.....168.....288
4..|.....144.....360.....672.....1080
5..|.....480.....1008.....1728.....2640
6..|.....1200.....2240.....3600.....5280
*****
n\r|.....1.....2.....3.....4
===== k = 4
4..|.....192.....960.....2688.....5760
5..|.....1920.....6720.....16128.....31680
6..|.....9600.....26880.....57600.....105600
*****
n\r|.....1.....2.....3.....4
===== k = 5
5..|.....1920.....13440.....48384.....126720
6..|.....28800.....134400.....403200.....950400
*****
n\r|.....1.....2.....3.....4
===== k = 6
6..|.....23040.....215040.....967680.....3041280
*****

```

آرایه منشور عددی همچنین در مقاطع و برش های عرضی، از آرایه های مثلثی تشکیل یافته است .

بطور مثال در زیر دو آرایه مثلثی حاصل از مقاطع و برش های عرضی از آرایه منشوری استرلینگ و آر-استرلینگ نوع چهارم ارائه می شود.

آرایه مثلثی حاصل از برش عرضی منشور عددی استرلینگ نوع چهارم حالت ( $r = 1$ )

n\t	1	2	3	4	5	6
1..	1;					
2..	4,	1;				
3..	24,	12,	1;			
4..	192,	144,	24,	1;		
5..	1920,	1920,	480,	40,	1;	
6..	23040,	28800,	9600,	1200,	60,	1;

آرایه مثلثی از برش عرضی منشور عددی آر-استرلینگ نوع چهارم، حالت ( $r = 2$ )

n\t	1	2	3	4	5	6
1..	1;					
2..	8,	1;				
3..	80,	20,	1;			
4..	960,	360,	36,	1;		
5..	13440,	6720,	1008,	56,	1;	
6..	215040,	134400,	26880,	2240,	80,	1;

در فرمول رابطه بازگشتی در آرایه های مثلثی مقدار ( $t$ ) یا شماره ستون عمودی، معادل ( $n-k+2$ ) در آرایه های منشوری می باشد.